ENSA d'Al-Hoceima
AP-I, Première Année,
Algèbre Linéaire,

Année 2019/2020
Semestre 2
TD7

Solution de la Série N$^o7$: Systèmes, systèmes de Cramer et systèmes inversibles

Exercice 1

1. Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et calculer son indice de nilpotence p.
   Calculer "$\exp(tN)$" pour tout réel t.
   *Montrer que le système $\{v, Nv, N^{p-1}v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout vecteur non nul v de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $(0,0,0,0,0)$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Montrer que L'ensemble E des solutions $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de E.
3. Vérifier que le système suivant est compatible

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & -4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 & = & 9 \end{array} \right.$$

   puis le résoudre dans $\mathbb{R}^5$. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est-il un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$?.

Solution :

1. La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente : en effet,

$$\begin{array}{rcl} N^2 & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ N^3 & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   donc N est nilpotente d'indice de nilpotence $p = 3$.
   – Soit t un nombre réel, calculons "$\exp(tN)$" : par définition, on a

$$\exp(tN) = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I_3 + t\,N + \frac{t^2}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} N^k$$

   comme N^k est la matrice nulle pour tout $k \geq 3$, alors

$$\exp(tN) = I_3 + t\,N + \frac{t^2}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 0 & t & \frac{1}{2}\,t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Montrons que le système $\{v, Nv, N^{p-1}v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout vecteur non nul v de $\mathbb{R}^3$: en effet, soit $v \in \mathbb{R}^3$ alors

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} N\,v &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \\ N^2\,v &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour montrer que le système $\{v, Nv, N^2v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'il est libre. Soit α, β et γ des scalaires réels tels que $\alpha\, v + \beta\, N\, v + \gamma\; N^2 v = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$? on a

$$\alpha\, v + \beta\, N\, v + \gamma\; N^2 v = \begin{pmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, y \\ \alpha\, z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta\, y \\ \beta\, z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma\, z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z \\ \alpha\, y + \beta\, z \\ \alpha\, z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z &=& 0, \\ \alpha\, y + \beta\, z &=& 0, \\ \alpha\, z &=& 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z &=& 0, \\ \alpha\, y + \beta\, z &=& 0, \\ \alpha = 0 \;\text{ où }\; z &=& 0 \end{array} \right.$$

si $z = 0$ et $\alpha \neq 0$, alors on obtient $x = y = z = 0$, donc le vecteur v est nul, ce qui est absurde car v devait être non nul ; d'où $\alpha = 0$, puis pour les vecteur v tels que $z \neq 0$, on a obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$ soit le système $\{v, Nv, N^2v\}$ est libre ;
comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \mathrm{Card}(\{v, Nv, N^2v\})$, d'où $\{v, Nv, N^2v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. – Vérifions que $(0, 0, 0, 0, 0)$ est solution du système

$$(\mathcal{P}) \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &=& 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &=& 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_5 &=& 0 \end{array} \right.$$

d'abord le système $(\mathcal{P})$ est sous-déterminé, c'est à dire le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnus. Le système $(\mathcal{P})$ est homogène, soit les termes du second membre du système sont nuls, donc le 5-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ satisfait bien les équations du système linéaire $(\mathcal{P})$; d'où $(0, 0, 0, 0, 0)$ est une solution évidente du système $(\mathcal{P})$.

– Montrons que l'ensemble E des solutions $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$: en effet, le système $(\mathcal{P})$ est équivalent au système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit l'écriture vectorielle du système $(\mathcal{P})$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $x_1 \ A_1 + x_2\, A_2 + x_3\, A_3 + x_4\, A_4 + x_5\, A_5 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$. Le choix de la sous-matrice D_r reste à faire pour résoudre ce type de systèmes linéaires sous-déterminés : soit D_r la sous-matrice de taille (3×3) donnée par $\det(\mathrm{D}_r) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
donc le choix de la sous-matrice D_r est favorable ; soit l'écriture vectorielle du système $(\mathcal{P})$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha - \beta \\ 2\alpha - 2\beta \\ 5\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha = x_4$ et $\beta = x_5$; alors

$$(\mathcal{P}') \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha - \beta \\ 2\alpha - 2\beta \\ 5\beta \end{pmatrix}$$

le système linéaire $(\mathcal{P}')$ admet une unique solution car $\det(\mathrm{D}_r) = 1 \neq 0$, alors par la méthode de Cramer on obtient

$$x_1 \quad = \quad \frac{\begin{vmatrix} -3\alpha - \beta & 2 & -1 \\ 2\alpha - 2\beta & 1 & 1 \\ 5\beta & 1 & -4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{29\alpha + 6\beta}{1} = 29\alpha + 6\beta$$

$$x_2 \quad = \quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3\alpha - \beta & -1 \\ 0 & 2\alpha - 2\beta & 1 \\ 2 & 5\beta & -4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-10\alpha - 3\beta}{1} = -10\alpha - 3\beta$$

$$x_3 \quad = \quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3\alpha - \beta \\ 0 & 1 & 2\alpha - 2\beta \\ 2 & 1 & 5\beta \end{vmatrix}}{1} = \frac{12\alpha + \beta}{1} = 12\alpha + \beta$$

donc l'ensemble E de solutions du système $(\mathcal{P}')$ est

$$\mathrm{E} = \left\{ (29\alpha + 6\beta, -10\alpha - 3\beta, 12\alpha + \beta, \alpha, \beta) \ / \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} \cdot$$

Soit X un élément de E, alors il existe au moins un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X = (29\alpha + 6\beta, -10\alpha - 3\beta, 12\alpha + \beta, \alpha, \beta)$$

donc $X = \alpha\,(29, -10, 12, 1, 0) + \beta\,(6, -3, 1, 0, 1)$, c'est à dire que u est une combinaison linéaire dans le système $\{u; v\}$ où $u = (29, -10, 12, 1, 0)$ et $v = (6, -3, 1, 0, 1)$; d'où le système $\{u; v\}$ engendre E ;
or le système le système $\{u; v\}$ est libre et engendre E , alors le système $\{u; v\}$ est une base de E ; finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et la dimension de E est égale à 2.
Remarques :
– Un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ s'appelle un **plan**.
– Un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^d$ ou $(d \geq 4)$ s'appelle un **hyperplan**.

– La matrice D_r lors de résolutions de systèmes linéaires sous-déterminés homogènes n'est pas unique, **mais** l'ensemble de solutions est toujours un sous-espace vectoriel.

3. Vérifions que $(0,0,0,0,0)$ est solution du système

$$(\mathcal{Q})\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5 &=& 3,\\ x_2+x_3-2x_4+2x_5 &=& -4,\\ 2x_1+x_2-4x_3-5x_5 &=& 9 \end{array}\right.$$

le système $(\mathcal{Q})$ est sous-déterminé, c'est à dire le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnus. Le système $(\mathcal{Q})$ n'est pas homogène, soit les termes du second membre du système sont non nuls. On prend le 5-uplet $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,1,1,1,-2)$ satisfait bien les équations du système linéaire $(\mathcal{Q})$; d'où $(1,1,1,1,-2)$ est une solution du système $(\mathcal{Q})$, donc le système $(\mathcal{Q})$ admet au moins une soulution, d'où le système $(\mathcal{Q})$ est compatible.

4. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{Q})$, alors de $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^5$: en effet, le système $(\mathcal{Q})$ est équivalent au système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 9 \end{pmatrix}$$

soit l'écriture vectorielle du système $(\mathcal{P})$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\9\end{pmatrix}$$

donc $x_1\ A_1 + x_2\, A_2 + x_3\, A_3 + x_4\, A_4 + x_5\, A_5 = b$ où

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix};\ A_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix};\ A_5=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}3\\-4\\9\end{pmatrix}$$

Le choix de la sous-matrice D_r reste à faire pour résoudre ce type de systèmes linéaires sous-déterminés : soit D_r la sous-matrice de taille (3×3) donnée par $\det(\mathrm{D}_r) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc le choix de la sous-matrice D_r est favorable ; soit l'écriture vectorielle du système $(\mathcal{P})$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\9\end{pmatrix}$$

donc

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}=-x_4\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}-x_5\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-4\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3\alpha-\beta\\-4+2\alpha-2\beta\\9+5\beta\end{pmatrix}$$

où $\alpha = x_4$ et $\beta = x_5$; alors

$$(\mathcal{Q}')\ :\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3\alpha-\beta\\ -4+2\alpha-2\beta\\ 9+5\beta \end{pmatrix}$$

le système linéaire $(\mathcal{Q}')$ admet une unique solution car $\det(\mathrm{D}_r) = 1 \neq 0$, alors par la méthode de Cramer on obtient

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3-3\alpha-\beta & 2 & -1 \\ -4+2\alpha-2\beta & 1 & 1 \\ 9+5\beta & 1 & -4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-16+29\alpha+6\beta}{1} = 29\alpha+6\beta-16$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-3\alpha-\beta & -1 \\ 0 & -4+2\alpha-2\beta & 1 \\ 2 & 9+5\beta & -4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4-10\alpha-3\beta}{1} = -10\alpha-3\beta+4$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-3\alpha-\beta \\ 0 & 1 & -4+2\alpha-2\beta \\ 2 & 1 & 9+5\beta \end{vmatrix}}{4} = \frac{-9+12\alpha+\beta}{1} = 12\alpha+\beta-9$$

donc l'ensemble $\mathcal{S}$ de solutions du système $(\mathcal{Q}')$ est

$$\mathcal{S} = \left\{(29\alpha+6\beta-16, -10\alpha-3\beta+4, 12\alpha+\beta-9, \alpha, \beta) \;/\; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Soit X un élément de $\mathcal{S}$, alors il existe au moins un couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X = (29\alpha+6\beta-16, -10\alpha-3\beta+4, 12\alpha+\beta-9, \alpha, \beta)$$

donc $X = (-16, 4, -9, 0, 0) + \alpha\,(29, -10, 12, 1, 0) + \beta\,(6, -3, 1, 0, 1)$, c'est à dire que pour $\alpha = \beta = 0$, on a $X = (-16, 4, -9, 0, 0)$; d'où $(0, 0, 0, 0, 0) \notin \mathcal{S}$;
finalement $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$, **mais** on dit que $\mathcal{S}$ est un hyperplan affine.

$\square$

Exercice 2
On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

1. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle.
2. Soit A la matrice du système $(\mathcal{S})$. Calculer A^2 et A^3, puis en déduire u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3 et w_3
3. Déduire les expressions des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de A, n et (u_0, v_0, w_0).

Solution : Considèrons les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

1. La forme matricielle du système $(\mathcal{S})$: soot $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X_{n+1} = A\, X_n \quad \forall n \geq 0$$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice du système $(\mathcal{S})$.

2. Calculons A^2 et A^3 :

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A \times A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

– pour $n = 1$, alors on $X_2 = A\, X_1 = A^2\, X_0$, donc

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\, u_0 + 5\, v_0 + 5\, w_0 \\ 5\, u_0 + 6\, v_0 + 5\, w_0 \\ 5\, u_0 + 5\, v_0 + 6\, w_0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} u_2 &= 6\, u_0 + 5\, v_0 + 5\, w_0 = 6 \\ v_2 &= 5\, u_0 + 6\, v_0 + 5\, w_0 = 6 \\ w_2 &= 5\, u_0 + 5\, v_0 + 6\, w_0 = 4 \end{cases}$$

– pour $n = 2$, alors on $X_3 = A\, X_2 = A^3\, X_0$, donc

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\, u_0 + 21\, v_0 + 21\, w_0 \\ 21\, u_0 + 22\, v_0 + 21\, w_0 \\ 21\, u_0 + 21\, v_0 + 22\, w_0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} u_3 &= 22\, u_0 + 21\, v_0 + 21\, w_0 = 22 \\ v_3 &= 21\, u_0 + 22\, v_0 + 21\, w_0 = 22 \\ w_3 &= 21\, u_0 + 21\, v_0 + 22\, w_0 = 20 \end{cases}$$

3. les expressions des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de A, n et (u_0, v_0, w_0) : on a $X_{n+1} = A\, X_n$, alors par récurrence il vient

$$X_n = A^n\, X_0$$

on peut démontrer par récurrence que

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 22 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 22 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (4^n + 2)\, u_0 + (4^n - 1)\, v_0 + (4^n - 1)\, w_0 \\ (4^n - 1)\, u_0 + (4^n + 2)\, v_0 + (4^n - 1)\, w_0 \\ (4^n - 1)\, u_0 + (4^n - 1)\, v_0 + (4^n + 2)\, w_0 \end{pmatrix}$$

pour $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$, on obtient

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{1}{3}(4^n + 2) \\ \\ v_n &= \dfrac{1}{3}(4^n + 2) \\ \\ w_n &= \dfrac{1}{3}(4^n - 4) \end{cases}$$

$\square$

Exercice 3
On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - w_n \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n \end{array} \right.$$

1. Écrire le système (S) sous la forme matricielle
$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$
2. Montrer que A est inversible, puis calculer sa matrice inverse.
3. Soit P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$ où B est une matrice diagonale d'éléments diagonaux λ_1, λ_2 et λ_3. Monter que $B^n = P^{-1}A^nP$.
4. Calculer A^2 et A^3.
5. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \{1, 2\}$.

Solution : Considèrons les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - w_n \\ w_{n+1} & = & u_n - v_n \end{array} \right.$$

1. La forme matricielle du système (S) :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X_{n+1} = A\,X_n \quad \forall n \geq 0$$
où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice du système $(\mathcal{S})$.
2. Montrons que A est inversible : pour cela il suffit de calculer son déterminant
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 3 = 1 \neq 0$$
d'où A est inversible.
Calculons A^{-1} l'inverse de A : on utilise la formule
$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}(A)}\,\text{Com}(A^T) = \frac{1}{\text{det}(A)}\,(\text{Com}(A))^T$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors calculons les mineurs

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad \Gamma_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \\
\Gamma_{13} &= +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Gamma_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\
\Gamma_{22} &= +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad \Gamma_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \\
\Gamma_{31} &= +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Gamma_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \\
\Gamma_{33} &= +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Soit P une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$ où B est une matrice diagonale d'éléments diagonaux λ_1, λ_2 et λ_3. Montrons que $B^n = P^{-1}A^nP$: en effet, soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois scalaires tels que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

soit une matrice semblable à A ; alors $B = P^{-1}AP$; donc on fait une démonstration par récurrence

– pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ est la matrice identité de taille (3×3), alors $B^0 = I_3 = P^{-1}P = P^{-1}A^0P$;
pour $n = 1$, on a $A^1 = A$ et $B1 = B = P^{-1}AP = P^{-1}A^1P$; donc la propriété est vraie pour l'étape initiale.
– Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'étape $(n-1)$, c'est à dire que $B^{n-1} = P^{-1}A^{n-1}P$; montrons qu'elle est encore vraie pour l'étape n. On a

$$\begin{aligned}
B^n = B\,B^{n-1} &= P^{-1}APP^{-1}A^{n-1}P = P^{-1}A(PP^{-1})A^{n-1}P \\
&= P^{-1}AI_3A^{n-1}P = P^{-1}AA^{n-1}P = P^{-1}A^nP
\end{aligned}$$

donc la propriété reste encore vraie pour l'étape n.
– D'après la propriété de récurrence, on a $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \geq 0$.

soit

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} = P^{-1}A^nP.$$

4. Calculons A^2 et A^3 :

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
A^3 &= A \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \{1, 2\}$: pour $n = 1$, alors on $X_2 = A\,X_1 = A^2\,X_0$, donc

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_0 + 4\,v_0 - 4\,w_0 \\ 2\,v_0 - 3\,w_0 \\ v_0 - 2\,w_0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_2 & = & -u_0+4\,v_0-4\,w_0=7 \\ v_2 & = & 2\,v_0-3\,w_0=5 \\ w_2 & = & v_0-2\,w_0=3 \end{array}\right.$$

pour $n=2$, alors on $X_3=A\,X_2=A^3\,X_0$, donc

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -u_0+3\,v_0-w_0 \\ -u_0+3\,v_0-2\,w_0 \\ -u_0+2\,v_0-w_0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_3 & = & -u_0+3\,v_0-w_0=3 \\ v_3 & = & -u_0+3\,v_0-2\,w_0=4 \\ w_3 & = & -u_0+2\,v_0-w_0=2 \end{array}\right.$$

Remarque : les valeurs λ_1, λ_2 et λ_3 sont appelées les **valeurs propres** de la matrice A ; cette partie sera traitée lors du **cours d'Algèbre 3** en semestre 3 de la deuxième année préparatoire. $\square$

Exercice 4

On considère la matrice $B=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $(\mathcal{S})$ le systeme differentiel lineaire avec second membre

$$(\mathcal{S}):\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 3x(t)+9y(t)-9z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) \\ z'(t) & = & 3x(t)+3y(t)-3z(t) \end{array}\right.$$

où x, y et z sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $t\in\mathbb{R}\longmapsto X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

1. Calculer B^2 et B^3, puis calculer $\exp(tB)$
2. Ecrire le système différentiel linéaire $(\mathcal{S})$ sous la forme $X'(t)=A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.
3. Déterminer toutes les solutions du système $(\mathcal{S})$. Que peut-on déduire ?

Solution : Considérons le système différentiel linéaire sans second membre $(\mathcal{S})$ (homogène) donné par

$$(\mathcal{S}):\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 3x(t)+9y(t)-9z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) \\ z'(t) & = & 3x(t)+3y(t)-3z(t) \end{array}\right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t\in\mathbb{R}\longmapsto X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

1. Calculons les puissance B^2 et B^3 :

$$\begin{array}{rcl} B^2 & = & B\times B=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \\ B^3 & = & B\times B^2=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On en déduit que la matrice B est nilpotente d'indice de nilpotence $p = 3$ car B^k est la matrice nulle pour tout $k \geq 3$. Calculons la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t : pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $t\,B = \begin{pmatrix} 3t & 9t & -9t \\ 2t & 0 & 0 \\ 3t & 3t & -3t \end{pmatrix}$, alors

$$\exp(tB) = I_3 + t\,B + \frac{t^2}{2}B^2 + \sum_{k\geq 3}\frac{t^k}{k!}B^k = I_3 + t\,B + \frac{t^2}{2}B^2$$

car $\displaystyle\sum_{k\geq 3}\frac{t^k}{k!}N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle car $B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 3$, finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on obtient

$$A = \exp(tB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t & 9t & -9t \\ 2t & 0 & 0 \\ 3t & 3t & -3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3t^2 & 9t^2 & -9t^2 \\ 3t^2 & 9t^2 & -9t^2 \end{pmatrix}.$$

d'où

$$A = \exp(tB) = \begin{pmatrix} 1+3t & 9t & -9t \\ 2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2 \\ 3t+3t^2 & 3t+9t^2 & 1-3t-9t^2 \end{pmatrix}.$$

2. La forme matricielle équivalente du système $(\mathcal{S})$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

d'où la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$.
La matrice B soit inversible si et seulement si $\det(B) \neq 0$, or $\det(B) = 1 - 1 = 0$; donc B n'est pas inversible.

3. Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système $X'(t) = B\,X(t)$ alors la solution $X(t)$ s'écrit formelement $X(t) = \exp(tB)\,X(0)$ où $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$.
On déduit donc la solution

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t & 9t & -9t \\ 2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2 \\ 3t+3t^2 & 3t+9t^2 & 1-3t-9t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

soit la solution générale donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x(0)(1+3t) + 9(y(0) - z(0))\,t \\ y(t) = x(0)(2t+3t^2) + y(0)(1+9t^2) - 9z(0)\,t^2 \\ z(t) = x(0)(3t+3t^2) + y(0)(3t+9t^2) + z(0)(1-3t-9t^2) \end{cases}$$

en particulier, pour $x(0) = a$, $y(0) = b$ et $z(0) = c$, il vient

$$\begin{cases} x(t) = a + (3a - 9c)\,t \\ y(t) = b + 2a\,t + (3a + 9b - 9c)\,t^2 \\ z(t) = c + (3a + 3b + c)\,t + (3a + 9b - 9c)\,t^2 \end{cases}$$

On en déduit que le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions lorsque $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$; **mais** on peut avoir un unique solution si la condition initiale $(x(0),y(0),z(0))=(a,b,c)$ est fixée dès le départ. Soit F l'ensemble de solutions de $(\mathcal{S})$, alors

$$F=\{(x(t),y(t),z(t))\ /\ t\in\mathbb{R}\}$$

donc pour tout $X(t)\in F$ on a

$$\begin{aligned} X(t) &= (a+(3a-9c)\,t;b+2a\,t+(3a+9b-9c)\,t^2;c+(3a+3b+c)\,t+(3a+9b-9c)\,t^2) \\ &= (a;b;c)+(3a-9c;b+2a;3a+3b+c)\,t+(0;3a+9b-9c;3a+9b-9c)\,t^2. \end{aligned}$$

$\square$